

LVIII олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии
МАТЕМАТИКА, ШКОЛЬНЫЙ ТУР
Таллинн, 24 ноября 2010 года
IX класс

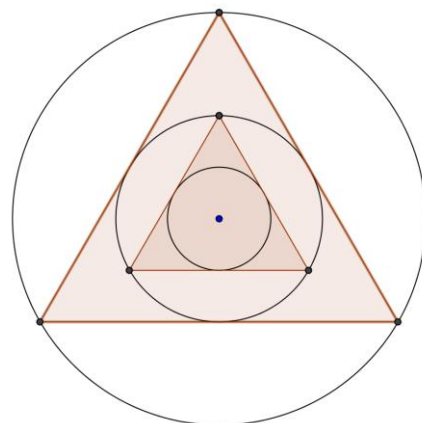
Время, отводимое для решения: 3 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найди выражение квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что график функции касается оси абсцисс в точке $A(4;0)$ и проходит через точку $B(6;2)$.
2. Из города A в город B выехал грузовик, который движется с постоянной средней скоростью 50 км/ч. Одновременно из города B ему навстречу выехал легковой автомобиль, который также движется с постоянной скоростью. Через 3 часа после начала движения автомобилям до встречи осталось 10 км, а через 4 часа после начала движения, они успели проехать мимо друг друга и расстояние между ними оказалось 120 км. Сколько часов ехал грузовик из города A в город B и сколько часов ехал легковой автомобиль из города B в город A ?

3. В круг вписан равносторонний треугольник, вершины которого лежат на окружности. В этот треугольник вписан круг, который касается всех сторон треугольника. В этот круг в свою очередь вписан равносторонний треугольник, вершины которого лежат на окружности и в этот треугольник вписан круг, который касается всех сторон треугольника (см. рисунок). Найди на сколько процентов площадь меньшего круга меньше площади большего круга.



4. Близнецами назовём два таких простых числа, разность которых равна 2. Доказать, что произведение произвольных чисел – близнецов и трёх их непосредственных соседей делится нацело на число 240.
Пример: произведение двух простых чисел – близнецов 3 и 5 и трёх их непосредственных соседей 2, 4 и 6 действительно делится нацело на 240. $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ и $720 : 240 = 3$.
5. На острове есть только две деревни. Жители деревни правдолюбцев всегда говорят только правду, а жители деревни лжецов всегда только лгут. Но у жителей обеих деревень есть одна общая традиция: у каждого дома в деревне растёт семейное дерево, которым может быть берёза или липа или дуб. Капитан корабля, который забрал с острова 10 путешественников, решил выяснить, сколько на борту корабля правдолюбцев и сколько лжецов. Он раздал путешественникам листочки с вопросом „Рядом с твоим домом растёт берёза?“ и получил 2 положительных ответа и 8 отрицательных. Тогда он раздал листочки с вопросом „Рядом с твоим домом растёт липа?“ и получил 5 положительных ответов и 5 отрицательных. Наконец, на вопрос „Рядом с твоим домом растёт дуб?“ он получил 6 положительных ответов и 4 отрицательных. Сколько правдолюбцев и сколько лжецов было на борту корабля?